Programmes calculette :B&S call bsc() ;put bsp()|Merton call cdiv();put pdiv()|trouver N(d1):g(d1)

Duration $D = (1+r)\,S = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n}\frac{tF_t}{(1+r)^t}$

entre deux coupons D décroît linéaire

Plein/pied coup/coup couru : $C' = C + CC$

si r=i à date coup oblig au pair et C=100%

Tx continu/discret : $(1+i)^k = e^{rk} \Leftrightarrow r = \ln(1+i)$

Volat ann/hebdo : $\sigma_a = \sqrt{52}\sigma_h$

<u>Stratégie statique :</u>

pente call/put (achat ;vente) :(+1 ;-1)/(-1 ;+1)

g->d calls;g<-d puts;out of money->in the money

si collé ax abscisse put; si infini à gauche pente≠0 call

Achat(vente) Call digit K⇔Vente(achat) Put digit K

<u>Calcul stochastique :</u>

Wiener $dW_t^q = dW_t^p + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt$

$(dW)^2 = dt \qquad W(T) - W(0) \sim N(0,t)$

$(dW)^2 = dt$	$(dt)^2 = 0$	$dW\,dt = 0$ $dW_1\,dW_2 = cov(dW_1, dW_2)\,r_{12}\,dt$
$(dX)^2 = (\mu\,dt + \sigma\,dW)^2 = \sigma^2\,dt$	$dX\,dt = 0$	$dX_1\,dX_2 = cov(dX_1, dX_2) = \sigma_{12}\,dt$
	$d\mathrm{Log}X = (dX/X) - ½\,(dX/X)^2$	

Ito

$$\boxed{dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad\Rightarrow\quad X_t = X_0 + \int_s^t \mu(u)\,du + \int_s^t \sigma(u)\,dW_u}$$

$$\boxed{Y_t = f(t,X_t) \quad\Rightarrow\quad dY_t = df(t,X_t) = \frac{\delta f}{\delta t}(t,X_t)\,dt + \frac{\delta f}{\delta X_t}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta X_t^2}(t,X_t)\,(dX_t)^2}$$

$$Y_t = f(X_t) \quad\Rightarrow\quad dY_t = df(X_t) = \frac{\delta f}{\delta X_t}(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta X_t^2}(X_t)\,(dX_t)^2$$

$$X_t = f(t,W_t) \quad\Rightarrow\quad dX_t = df(t,W_t) = \frac{\delta f}{\delta t}(t,W_t)\,dt + \frac{\delta f}{\delta W_t}(t,W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta W_t^2}(t,W_t)\,dt$$

$$X_t = f(W_t) \quad\Rightarrow\quad dX_t = df(W_t) = \frac{\delta f}{\delta W_t}(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta W_t^2}(W_t)\,dt$$

EDS B&S $\frac{d\beta_t}{\beta_t} = rdt \Leftrightarrow \beta_T = e^{rT}$

$$d\pi(t,S_t) = \left(\frac{\partial\pi}{\partial t}(\cdot) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}(\cdot)\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial\pi}{\partial S}(\cdot)\,dS_t$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial\pi}{\partial S}(\cdot)S_t r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}(\cdot)\sigma^2 S_t^2 = r\pi_t(\cdot)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW \Rightarrow S(t) = S(0)\,e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

option américaine/européenne : (américaine≠euro si dividende)

valeur temps put/call américain >=0

valeur temps put européen <0 qd très in the money

B&S standard : martingale $Y_t = S_t e^{-rT}$; $E\left[Y(t) + dY \mid Y(t)\right] = Y(t)$

$E_Q\left[e^{\sigma W(t)}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}\cdot t}$; $P(t) = C(t) - S + Ke^{-r(T-t)}$ relation de parité AOA

call $C(\overset{+}{S},\overset{-}{K},\overset{+}{T},\overset{+}{\sigma}) = Max(0, S_t - K) = VI_C$ put $P(\overset{-}{S},\overset{+}{K},\overset{+}{T},\overset{+}{\sigma}) = Max(0, K - S_t) = VI_P$

$C(0) = e^{-rT}\cdot E_Q\left[C(S(T),T)\right] = e^{-rT}\cdot E_Q\left[\left[S(T)-k\right]^+\right]$; $\boxed{N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-z^2}{2}}}$

$P(0) = e^{-rT}\cdot E_Q\left[P(T,S(T))\right] = e^{-rT}\cdot E_Q\left[\left[k-S(T)\right]^+\right]$

<u>Emprunt synthétique</u> : Achat C + Vente P + Vente S ;<u>Prêt synthé</u> Vente C + Achat P + Achat S

N(-d1) = 1 - N(d1)

Demo b&S martingale

$$C_t = e^{-r(T-t)}E_Q\left[(S_T - K)1_{S_t > K}\right]$$

$$= e^{-r(T-t)}E_Q\left[S_t e^{(r-0.5\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon}1_{S_T>K}\right] - e^{-r(T-t)}E_Q\left[K1_{S_T>K}\right]$$

$$S_T \geq K \Leftrightarrow S_t e^{(r-0.5\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon} \geq K \Leftrightarrow e^{\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon} \geq \frac{K}{S_t}e^{-(r-0.5\sigma^2)(T-t)}$$

$$\varepsilon \geq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -d_2$$

$$C_t = \left(e^{-r(T-t)}e^{(r-0.5\sigma^2)(T-t)}S_t \int_{\varepsilon\geq -d_2} \varepsilon e^{\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon}d\varepsilon\right) - \left(Ke^{-r(T-t)}\int_{\varepsilon\geq -d_2}\varepsilon d\varepsilon\right) = I_1 - I_2$$

$$I_2 = Ke^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5\varepsilon^2}d\varepsilon = Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$I_1 = S_t e^{-0.5\sigma^2(T-t)}\int_{\varepsilon\geq -d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon - 0.5\varepsilon^2}d\varepsilon$$

chgt variable $\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t} = \varepsilon_2$

$I_1 = S_t N(d_2 + \sigma\sqrt{T-t})$ $C(t) = \left[S\cdot N(d_1)\right] - \left[Ke^{-r(T-t)}\cdot N(d_2)\right]$;

$P = \left[Ke^{-rT}\cdot N(-d2)\right] - \left[S\cdot N(-d1)\right]$

$d_1 = \left[\ln(S/K) + (i + \sigma^2/2)\times T\right] / \left[\sigma\times\sqrt{T}\right]$;

$d_2 = d_1 - \sigma\times\sqrt{T}$ lettres grecques :

$\Delta_C = \delta C/\delta S \quad (= N(d1)\ si\ BS) \qquad \Delta_P = \delta P/\delta S \quad (= N(d1) - 1\ si\ BS)$

$$\Gamma_C = \Gamma_P = \frac{\partial\delta_C}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\times\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\upsilon_C = \upsilon_P = \partial C/\partial\sigma = S\sqrt{T}N'(d_1) \ ; \ \theta_P = \theta_C + rKe^{-rT}$$

$$\theta_C = \partial C/\partial T = -\left(S\sigma/2\sqrt{T}\,N'(d_1) + rKe^{-rT}N(d_2)\right) < 0$$

$$\theta_P = \partial P/\partial T = -\left(S\sigma/2\sqrt{T}\,N'(d_1) - rKe^{-rT}N(-d_2)\right) < 0$$

$$\rho_C = \partial C/\partial r = \left[TKe^{-rT}N(d_2)\right] > 0; \ \rho_P = \partial P/\partial r = \left[-N(-d_2)TKe^{-rT}\right] < 0$$

<u>Merton :</u>

$C_t - P_t = \left(S_t\cdot e^{-d(T-t)}\right) - Ke^{-r(T-t)}$; $dS_t/dS_t = (r-c)\,dt + \sigma dW$

$$S_T = S_t e^{\left(r - c - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}U} \ ; \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$$d_1 = \left[\ln(S_t/K) + \left(r - c + 1/2\,\sigma^2\right)(T-t)\right] / \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$$C(t,S_t) = \left[\left(S_t\cdot e^{-d(T-t)}\right)\cdot N(d_1)\right] - \left[K\cdot e^{-r(T-t)}\cdot N(d_2)\right]$$

$$P(t,S_t) = \left[K\cdot e^{-r(T-t)}\cdot N(-d_2)\right] - \left[\left(S_t\cdot e^{-d(T-t)}\right)\cdot N(-d_1)\right]$$

$Y_t = S_t e^{-c(T-t)}$;comme B&S mais on remplace S_t par Y_t et d_1 et d_2 changent dans la formule martingale de B&S.

lettres grecques :

$$\delta_C = \partial C/\partial S = e^{-cT}N(d_1) \ ; \ \delta_P = \partial P/\partial S = -e^{-cT}N(-d_1)$$

$$\Gamma_C = \Gamma_P = e^{-cT}\,N'(d_1)/S\sigma\sqrt{T} \quad \upsilon_C = \upsilon_P = Se^{-cT}\sqrt{T}N'(d_1)$$

$$\theta_C = -Se^{-cT}\sigma/2\sqrt{T}\,N'(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2) + cSe^{-cT}N(d_1)$$

$$\theta_P = \partial\left(C_t - \left(S_t\cdot e^{-c(T-t)}\right) + Ke^{-r(T-t)}\right)/\partial T$$

<u>B&S avec dividendes discrets :</u>

Reprendre la formule B&S mais remplacer S_t par S_t - D* (D*=v.a. en t div discrets) ainsi que dans d_1 et d_2

<u>Black (option sur contrat à terme) :</u>

$C - P = e^{-rT}\times(F - K)$; $dF_t^{T'}/F_t^{T'} = \sigma dW_t$; $d2 = d1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$

$C(t,F_t^T) = e^{-r(T-t)}\left[\left(F_t^T\cdot N(d_1)\right) - \left(K\cdot N(d_2)\right)\right]$; $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_t^T}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$

$P(t,F_t^T) = e^{-r(T-t)}\left[\left(K\cdot N(-d_2)\right) - \left(F_t^T\cdot N(-d_1)\right)\right]$

lettres grecques :

$$\delta_C = \partial C/\partial S = e^{-rT}N(d_1) \ ; \ \delta_P = \partial P/\partial S = -e^{-rT}N(-d_1)$$

$$\Gamma_C = \Gamma_P = e^{-rT}\,N'(d_1)/F\sigma\sqrt{T} \ ; \ \upsilon_C = \upsilon_P = Fe^{-rT}\sqrt{T}N'(d_1)$$

$$\rho_C = \partial C/\partial r = -TC \ ; \ \rho_P = \partial P/\partial r = -TP$$

$$\theta_C = rC - e^{-rT}\sigma F/2\sqrt{T}\,N'(d_1)$$

$$\theta_P = rP - e^{-rT}\sigma F/2\sqrt{T}\,N'(d_1)$$

Programmes calculette :B&S call bsc() ;put bsp()|Merton call cdiv();put pdiv()|trouver N(d1):g(d1)

Option sur taux de change :

r_d (resp. r_f)taux sans risque domestique (resp.étranger)

$$dS_t/S_t = (r_d - r_f)dt + \sigma dW$$

Garman-Kohlhagen : $C_t - P_t = S_t e^{-r_f(T-t)} - Ke^{-r_d(T-t)}$

$$C_t(\cdot) = S_t e^{-r_f(T-t)} N(d_1) - Ke^{-r_d(T-t)} N(d_2)$$

$$P_t(\cdot) = Ke^{-r_d(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-r_f(T-t)} N(-d_1)$$

$$d_1 = \left(\ln(S_t/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)(T-t)\right) / \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Option d'échange :

$$[S_T - X_T]^+ \ ; dS_t/S_t = r_t dt + \sigma_S dW_S$$

$$dX_t/X_t = r_t dt + \sigma_X dW_X \ ; C_t = S_t N(d_1) - X_t N(d_2)$$

$$d_1 = \left(\ln(S_t/X_t) + (+v^2/2)(T-t)\right) / v\sqrt{(T-t)}$$

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{(T-t)} \ ; \ C_T/X_T = [S_T/X_T - 1]^+$$

$$v^2 = 1/(T-t) \int_t^T \sigma_y^2 dy \ ;$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_S^2(y) + \sigma_X^2(y) - 2\sigma_{SX}(y)$$

Stratégie dynamique :

Pour gestion delta neutre portefeuille, équilibrer égalité

$$\Delta_X = n_C \delta_C + n_P \delta_P + n_{asj}$$

Options exotiques :

Option digitale

"CASH or NOTHING" C(0)=exp(-rT).P[S_T>K]= exp(-rT).N(d2); P(0)=exp(-rT).[1-P[S_T>K]]= exp(-rT).[1-N(d2)]; C(0)+ P(0)= exp(-rT) ; "ASSET or NOTHING" C(0)=S_0.N(d1); P(0)= S_0.[1-N(d2)]

Un call standard européen peut être dupliqué par l'achat de S call "ASSET or NOTHING" et la vente de K calls "CASH or NOTHING".

Option barrière

Une option à barrière vaut moins qu'une standard, mais un call standard est égal à un call down and in + un call down and out.

Option lookback

Soit le sous-jacent est un max ou min soit c'est le strike (il faut regarder chaque trajectoire pour connaître le payoff)

Modèle COXX ROSS RUBINSTEIN(ajouter calcul delta approx)

Hypothèses générales

Faire arbre asj, puis calculer le payoff, puis calculer les probas, puis faire le rebours en VAP.

Pour savoir si il faut exercer avant mat, il faut comparer le payoff à la valeur de l'option et qu'il soit plus grand que celle-ci.

$$C = p \cdot C_u + (1-p)C_d / (1+r)$$

$$p = \left(e^{r\sqrt{\delta_t}} - d\right) / (u-d) \ ; \ 1-p = \left(u - e^{r\sqrt{\delta_t}}\right) / (u-d) \text{ et}$$

$u = e^{\sigma\sqrt{t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{t}}$

formule générale (option standard) :

$$\delta_t = T/n \Rightarrow T/\delta_t = n$$

$$C(t) = e^{(\delta_t)\times\frac{T}{\delta_t}} \times \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} p^k (1-p)^{n-k} \left[S_t \times u^k \times d^{n-k} - K\right]^+\right]$$

$$P(t) = e^{(\delta_t)\times\frac{T}{\delta_t}} \times \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} p^k (1-p)^{n-k} \left[K - S_t \times u^k \times d^{n-k}\right]^+\right]$$

Contrat à terme tick =0.01%=10€

Achat d'un CAT : En T, on paye F_0 et on reçoit le sous-jacent ⇒ Forward : G(T) = F_T – F_0 (= C_T – F_0)

Vente d'un CAT : En T, on reçoit F_0 et on livre le sous-jacent ⇒ Forward : G(T) = F_0 - F_T (=F_0 - C_T)

Achat comptant + Emprunt + Vente à terme = 0 ⇒ Achat comptant + Emprunt ≅ - Vente à terme (= Achat à terme)

$\boxed{\text{En AOA : } F_0 - C_0 = C_0\times(1+r_T)^T - 1}$

$\boxed{\text{Valeur du contrat en } t \in [0, T] = [F_T - F_0]\times e^{i_{T-t}[T-t]}}$

« Montant dû » par l'acheteur (100€ de nominal) :

$$\boxed{MD_S = f_{S,T} \times F_T + CC_S(T,r) \Rightarrow Pour 1\ contrat: \ 100\,000 \times 1/100 \times MD_S}$$

(facteur de concordance*cotation% du contrat à l'échéance+coupon couru% sur la moins chère à l'échéance du contrat)*nominal/100

MARGE (Date j) = nb de contrats x (Nominal/100) x [cours (j) – cours (j-1)]

Calcul du facteur de concordance :

Si le taux facial MCL et notionnel sont égaux alors $C_i/f_i = 100; F_T = 100$

avec C_i cours pied coupon titre i

si taux facial MCL≠tx notionnel alors le fc est la valeur actuelle vue à maturité du contrat des coupons de l'oblig i actualisés au tx du notionnel plus la va de 1€ de capital moins le coupon couru à maturité du contrat

prix contrat à terme : $F_T = C_m(T)/f_m \ ; F_T \le C_i(T)/f_i$

Arbitrage Cash & Carry : Achat m au comptant + Emprunt + Vente CAT

Emprunt synthétique : Achat CAT + Vente m comptant

Arbitrage Reverse Cash & Carry : Vente m au comptant + Prêt + Achat CAT

Prêt synthétique : Vente CAT + Achat m comptant

Relation comptant terme cash & carry :

$$i = \frac{f_m . F + 100 k_m T - C_m}{C'_m T}$$, k_m tx coupon MCL (cela revient à dire gain nul sur c&c)

couverture de taux : $$N = \frac{V_{aleur} P_{osition} \times 100}{\text{Nominal}} \cdot \frac{D_{uration} P_{osition} R_{estant\ à\ courir}}{D_{mcl} \times C'_{mcl}} \cdot f_{mcl}$$

relation comptant terme reverse cash and carry :

$$Gain_{RCC} \le 0 \Leftrightarrow f_m F_0^T - C_m(0) \ge \left(iC'_m(0) - 100k_m\right)T$$

$$F_0^T = \left(C_m(0) + \left(iC'_m(0) - 100k_m\right)T\right) / f_m$$

si REPO alors

$$Gain_{RCC} \le 0 \Leftrightarrow f_m F_0^T - C_m(0) \ge \left((i-s)C'_m(0) - 100k_m\right)T$$

CDS

Les CDS, credit default swaps, représentent la moitié du marché des dérivés de crédits. 2 objectifs :

- connaître le fonctionnement des CDS et
- évaluer le fair spread d'un CDS

I. Principes de fonctionnement :

Un CDS est SWAP. Un CDS échange un risque de crédit contre de la protection. La protection porte sur un actif de référence : par exemple, une obligation de France Télécom. France Télécom est appelé « entité de référence ». L'acheteur d'un CDS verse une prime périodique au vendeur du CDS. C'est le spread. En échange de la prime, le vendeur s'engage à verser à l'acheteur un dédommagement cas de réalisation d'un événement de crédit (credit events : faillite, défaut de paiement, restructuration de la dette). Le dédommagement peut prendre deux formes :

- **physical settlement** : l'acheteur reçoit un versement (€) égal au nominal en échange du titre. Le vendeur se débrouille pour récupérer sa créance auprès de l'entité de référence mais ne pourra tt récupérer si défaillant.
- **cash settlement** : l'acheteur reçoit le payoff : nominal*(1 – taux de recouvrement) (tx de recouv. = ce que l'on récupère une fois que l'entreprise a fait faillite).

Proba de défaut cumulée : si une entr est très bien notée, le le risque de défaut augmente avec le tps.

si entr mal notée, moins elle est défaillante au début, plus la proba d'être remboursé est forte => la courbe s'aplatit.

Un CDS prend fin après le settlement.

Principe :

vendeur de protection=acheteur de bunds=position longue=>gagne qd le spread ↘ car proba de faire défaut de l'entité de réf ↘ => une bonne nouvelle lui permet de gagner plus.

acheteur de protection=vendeur à découvert de bunds=position short=>gagne qd le spread ↗ car proba de faire défaut de l'entité de réf ↗ => une mauvaise nouvelle le rend plus gagnant.

II. Evaluation du Fair spread en t=0

Comme un swap, un CDS a 2 parties : - la premium leg & - la protection ou float leg

La premium leg représente la chronique des flux versés par l'acheteur du CDS : les flux de prime.

La protection or float leg représente le flux versé par le vendeur en cas d'un credit event.

Pour analyser un produit, il faut toujours se placer du coté de l'acheteur : c'est plus simple !

Coté de l'acheteur : V(CDS) = V(FL) – V(PL)

et comme en 0, V(CDS) = 0 car c'est comme pour les SWAP, la valeur d'un CDS est nulle : on ne paie rien à l'émission : l'acheteur du CDS paie simplement des primes périodiques : donc la PL a la même chronique de flux qu'une obligation couponnée. En 0, V(PL) = V(FL) => vendre de la protection ⇔ acheter une obligation et donc recevoir un coupon (ici primes).

La méthode d'évaluation, c'est la réplication : le spread du CDS c'est la prime de l'actif de référence.

On peut répliquer la séquence de flux d'un CDS par deux séquence de flux d'obligation :

L'acheteur : achète une obligation A1 et reçoit c, l'entité vend une obligation et verse c+s car quand on émet une obligation on émet toujours avec une prime de risque : la somme de ces 2 chroniques de flux donne C-C-S qui est bien la séquence de flux d'un CDS. Le payoff d'un CDS est :

entre 0 et la date de défaut = spread

à la date de défaut t = nominal*(1-taux de recouvrement)

après la date de défaut = 0

Le but du pricing est de trouver le spread s qui égalise V(PL) et V(FL) en 0. La valeur de s en est donné par l'égalité du triangle de liquidité : PL*S = FL car S = proba de défaut * (1 – tx de recouvrement).

III. Mark to market

TRIANGLE DE CREDIT : r^*_{max} = r + s => tx max espéré si j'achète oblig FT=tx sans risque + spread

s=spread ; p=proba de faire défaut ; (1-p) = proba de survie ; α=taux de recouvrement et (1- α)=taux de perte

s = p (1- α) => p=s/(1- α) => 0,5/(1-0,4)=0,83% = proba de défaut à 1 an /////// proba de survie à 1 an=(1-p) /////// proba de survie à 5 ans =(1-p)^5 =95,90% /////////// proba de défaut cumulée sur 5 ans [1-(1-p)^5]=4,1%

Comment annuler une position sur CDS ? Prendre 1 position en sens inverse : 1/ achat de protection à 20bp et 2/ vente de protection à 26bp si spread a augmenté entre tps => je touche 6bp => MTM =

$$MTM = (1-p)\frac{6}{(1+r)} + (1-p)^2\frac{6}{(1+r)^2} + \ldots + (1-p)^4\frac{6}{(1+r)^4} = 6\sum_{i=1}^{4}\frac{(1-p)}{(1+r)}$$

Qd p est petit, on a (1-p)/(1+r) ~ 1/(1+r+p).

Achat protection : *** - s avec proba (1-p) = paiement de la prime (premium leg) =>J_s = -(1-p).s

*** (1-α) avec proba p = protection ou float leg => $J_{compensation}$ = p.(1-α)

=>(1-p).s = p.(1-α) => **s = p (1- α)** (triangle de crédit)

MTM pas symétrique : on perd + qd les spreads se rétrécissent que l'on gagne qd les spreads s'écartent. Au fur et à mesure que les srpeads s'écartent, le MTM d'un CDS est croissant mais de moins en moins.

Les MODELES DE CREDIT

I. Approche réduite ou modèle à intensité (pour faire essentiellement du MTM)

Le défaut = élément exogène dont on va modéliser la survenance par 1 processus de Poisson affecté de saut et chaque saut va représenter 1 évènement de crédit.

Proba d'un saut (credit event) entre t et t+dt : λ(t)dt = P(t,t+dt) ; (1- λ(t)dt)=0 =pas défaut et λ(t)dt=1 = défaut

Gamma(t)=proba de survie de l'émetteur de crédit.

$\gamma(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$ Si λ constant, $\gamma(t) = e^{-\lambda(t)}$

$$V(J_s) = s_0 N\int_0^T e^{-r\theta} \cdot e^{-\lambda\theta} d\theta = s_0 N\int_0^T e^{-(r+\lambda)\theta} d\theta \qquad V(J_c) = (1-\alpha)N\int_0^T e^{-r\theta} \cdot \left(\lambda e^{-\lambda\theta}\right) d\theta = (1-\alpha)N\lambda\int_0^T e^{-(r+\lambda)\theta} d\theta$$

Teta = proba cumulée de défaut ; N = nominal du swap ; s_0 = prime payée

II. Approche structurelle ou modèle de la firme ou modèle de Merton

V(t) = val totale de la firme //// S(t) = val de marché des actions //// B(t) = D = val de la dette de l'entr.

V(t)= S(t)+ B(t) ; on considère que la dette de l'entr est un ZC de maturité T et B=val faciale de la dette à rembourser. Si V(t)<B, alors l'entr est en faillite.

Action ⇔1 call sur l'action de l'entr (ou sur la val de l'entr.) de strike D => S(t)=MAX[V(t)-D ;0]

S_0=V(0).N(d1) – D.exp(-rT).N(d2)

d1=[(ln(V_0/D)+(r+σ^2/2).T)] / [σ.racine (T)] avec σ=volatilité de V. et d2=d1- (σ.racine (T))

L=levier de l'entr.=val actuelle de la dette/val. totale de l'entr. = D. exp(-rT) / V(0)

Plus L ↗ devant 1 = faible rating=> très endetté et Plus L ↘ devant 1= rating élevé=> peu endetté

=> S(0)=V(0).[N(d1)-L.N(d2)] et s = (1/T).ln[(N(d1)-L.N(d2))/L] => spread de crédit dépend de L (effet de levier)

Si levier faible (peu de dettes) alors spread de crédit sur des maturités courtes -> vers 0

Si levier fort (dettes élevées) alors spread de crédit sur des maturités lointaines -> vers l'infini

Stratégies dynamiques :

Arbitrage option / Titre : Estimations de l'option avec BS (si valeur théorique > valeur option ⇒ Option sous-cotée = Achat Option)

Arbitrage Option / Option : Méthode du θ implicite (si θ1>θ2 ⇒ Option 1 surévaluée / option 2 = Vente Option 1 et Achat Option 2)

Arbitrage Option / Option / Titre : Portefeuille tel que Δ_V=0 et Γ_V=0 et Wv=0

V(S) = x C + y P + z S / $\boxed{\Delta_V = x\,\Delta_C + y\,\Delta_P + z / \Gamma_V = x\,\Gamma_C + y\,\Gamma_P / W_V = x\,W_C + y\,W_P / \Theta_V = x\,\Theta_C + y\,\Theta_P}$

Si Δ_V=0 ⇒ Stabilité de S /Si Δ_V>0 ⇒ Evolution haussière de S/Si Δ_V<0 ⇒ Evol baissière de S

Si Δ_V=0 et Γ_V=0⇒Couverture (position indépendante de S) /+ Wv=0 ⇒ Position d'arbitrage

Si Δ_V=0 et Γ_V>0⇒Gain si ΔS (achat d'options) = port long en options+W_v>0⇒Anticipation ΔS importante (sens inconnu)

Si Δ_V=0 et Γ_V<0⇒Perte si v (vente d'options) = portefeuille court en options+ W_v<0 ⇒ Anticipation d'une stabilité de S